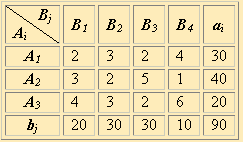
РГПУ им. А.И. Герцена

Тема «Оптимальность плана транспортной задачи»

Храмов С.А., 2ИВТ, 1 группа, 2 подгруппа

Задача 1



Решение:

Введем построение опорного плана методом двойного предпочтения:

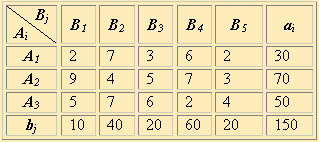
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai  Bj | B1 | | B2 | | B3 | | B4 | | ai |
| A1 | VV=20 | 2 | 0 | 3 | V=10 | 2 |  | 4 | 30 |
| A2 |  | 3 | V=30 | 2 |  | 5 | VV=10 | 1 | 40 |
| A3 |  | 4 |  | 3 | VV=20 | 1 |  | 6 | 20 |
| bj | 20 | | 30 | | 30 | | 10 | | 90 |

Число занятых клеток меньше, чем n + m - 1: 4 + 3 - 1 = 6 > 5, т.е. получен вырожденный план. Следовательно, заполняем числом «0» пустую клетку А1В2 , т.к. она имеет минимальный тариф (С12 = 3), и не образует с занятыми клетками замкнутого прямоугольного контура.

Составляем систему уравнений потенциалов (полагая u1 = 0):  
u1+v1=2 v1=2  
u1+v2=3 v2=3  
u1+v3=2 v3=2  
u2+v2=2 u2=-1  
u2+v4=1 v4=2  
u3+v3=1 u3=-1

Проверив свободные клетки, убеждаемся, что по теореме 5 план оптимален, следовательно, Z=Zmin.

Задача 2

  
Решение:

Введем построение опорного плана методом двойного предпочтения:

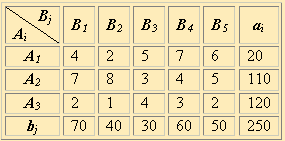
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai  Bj | B1 | | B2 | | B3 | | B4 | | B5 | | ai |
| A1 | VV=10 | 2 |  | 7 | V=20 | 3 |  | 6 | V=0 | 3 | 30 |
| A2 |  | 9 | VV=40 | 4 |  | 5 | 10 | 7 | 20 | 4 | 70 |
| A3 |  | 5 |  | 7 |  | 6 | VV=50 | 2 |  | 4 | 50 |
| bj | 10 | | 40 | | 20 | | 60 | | 20 | | 150 |

Число занятых клеток меньше, чем n + m - 1: 5 + 3 - 1 = 7 > 6, т.е. получен вырожденный план. Следовательно, заполняем числом «0» пустую клетку А1В5 , т.к. она имеет минимальный тариф (С15 = 3), и не образует с занятыми клетками замкнутого прямоугольного контура.

Составляем систему уравнений потенциалов (полагая u1 = 0):  
u1+v1=2 v1=2  
u1+v3=3 v3=3  
u1+v5=3 v5=3  
u2+v2=4 v2=3  
u2+v4=7 v4=6  
u2+v5=4 u2=1  
u3+v4=2 u3=-4

Проверив свободные клетки, убеждаемся, что по теореме 5 план оптимален, следовательно, Z=Zmin.  
Данный оптимальный план не является единственным, так как для клетки А1В4 сумма потенциалов равна стоимости перевозки u1 + v4 = с14.

Задача 3



Решение:

Введем построение опорного плана методом двойного предпочтения:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai  Bj | B1 | | B2 | | B3 | | B4 | | B5 | | ai |
| A1 |  | 4 | V | 2 |  | 5 |  | 7 | V=20 | 6 | 20 |
| A2 |  | 7 |  | 8 | VV=30 | 3 | VV=60 | 4 | V=20 | 5 | 110 |
| A3 | V=70 | 2 | VV=40 | 1 |  | 4 | V | 3 | V=10 | 2 | 120 |
| bj | 70 | | 40 | | 30 | | 60 | | 50 | | 250 |

Число занятых клеток n + m - 1: 5 + 3 - 1 = 7 = 7, т.е. получен невырожденный план.

Составляем систему уравнений потенциалов (полагая u1 = 0):  
u1+v5=6 v5=6  
u2+v3=3 v3=4  
u2+v4=4 v4=5  
u2+v5=5 u2=-1  
u3+v1=2 v1=6  
u3+v2=1 v2=5  
u3+v5=2 u3=-4

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(1;1): 0 + 6 > 4; ∆12 = 0 + 6 - 4 = 2  
(1;2): 0 + 5 > 2; ∆24 = 0 + 5 - 2 = 3  
max(2,3) = 3  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (1;1): 4  
Для этого в перспективную клетку (1;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-». Цикл приведен в таблице.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai  Bj | B1 | | B2 | | B3 | | B4 | | B5 | | ai |
| A1 | + | 4 |  | 2 |  | 5 |  | 7 | 20 - | 6 | 20 |
| A2 |  | 7 |  | 8 | 30 | 3 | 60 | 4 | 20 | 5 | 110 |
| A3 | 70 - | 2 | 40 | 1 |  | 4 |  | 3 | 10 + | 2 | 120 |
| bj | 70 | | 40 | | 30 | | 60 | | 50 | | 250 |

Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (1, 5) = 20. Прибавляем 20 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 20 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai  Bj | B1 | | B2 | | B3 | | B4 | | B5 | | ai |
| A1 | 20 | 4 |  | 2 |  | 5 |  | 7 |  | 6 | 20 |
| A2 |  | 7 |  | 8 | 30 | 3 | 60 | 4 | 20 | 5 | 110 |
| A3 | 50 | 2 | 40 | 1 |  | 4 |  | 3 | 30 | 2 | 120 |
| bj | 70 | | 40 | | 30 | | 60 | | 50 | | 250 |

Число занятых клеток n + m - 1: 5 + 3 - 1 = 7 = 7, т.е. получен невырожденный план.

Составляем систему уравнений потенциалов (полагая u1 = 0):  
u1+v1=4 v1=4  
u2+v3=3 v3=2  
u2+v4=4 v4=3  
u2+v5=5 u2=1  
u3+v1=2 u3=-2  
u3+v2=1 v2=3  
u3+v5=2 v5=4

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(1;2): 0 + 3 > 2; ∆24 = 0 + 3 – 2 = 1.  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (1;2): 2  
Для этого в перспективную клетку (1;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-». Цикл приведен в таблице.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai  Bj | B1 | | B2 | | B3 | | B4 | | B5 | | ai |
| A1 | 20 - | 4 | + | 2 |  | 5 |  | 7 |  | 6 | 20 |
| A2 |  | 7 |  | 8 | 30 | 3 | 60 | 4 | 20 | 5 | 110 |
| A3 | 50 + | 2 | 40 - | 1 |  | 4 |  | 3 | 30 | 2 | 120 |
| bj | 70 | | 40 | | 30 | | 60 | | 50 | | 250 |

Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (1, 1) = 20. Прибавляем 20 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 20 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

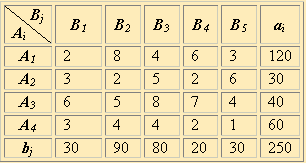
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai  Bj | B1 | | B2 | | B3 | | B4 | | B5 | | ai |
| A1 |  | 4 | 20 | 2 |  | 5 |  | 7 |  | 6 | 20 |
| A2 |  | 7 |  | 8 | 30 | 3 | 60 | 4 | 20 | 5 | 110 |
| A3 | 70 | 2 | 20 | 1 |  | 4 |  | 3 | 30 | 2 | 120 |
| bj | 70 | | 40 | | 30 | | 60 | | 50 | | 250 |

Число занятых клеток n + m - 1: 5 + 3 - 1 = 7 = 7, т.е. получен невырожденный план.

Составляем систему уравнений потенциалов (полагая u1 = 0):  
u1+v2=2 v2=2  
u2+v3=3 v3=1  
u2+v4=4 v4=2  
u2+v5=5 u2=2  
u3+v1=2 v1=3  
u3+v2=1 u3=-1  
u3+v5=2 v5=3

Проверив свободные клетки, убеждаемся, что по теореме 5 план оптимален, следовательно, Z=Zmin.

Задача 4



Решение:

Введем построение опорного плана методом двойного предпочтения:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai  Bj | B1 | | B2 | | B3 | | B4 | | B5 | | ai |
| A1 | VV=30 | 2 | 10 | 8 | V=80 | 4 |  | 6 |  | 3 | 120 |
| A2 |  | 3 | VV=30 | 2 |  | 5 | VV | 2 |  | 6 | 30 |
| A3 |  | 6 | 40 | 5 |  | 8 |  | 7 | V | 4 | 40 |
| A4 |  | 3 | 10 | 4 | V | 4 | VV=20 | 2 | VV=30 | 1 | 60 |
| bj | 30 | | 90 | | 80 | | 20 | | 30 | | 250 |

Число занятых клеток n + m - 1: 5 + 4 - 1 = 8 = 8, т.е. получен невырожденный план.

Составляем систему уравнений потенциалов (полагая u1 = 0):  
u1+v1=2 v1=2  
u1+v2=8 v2=8  
u1+v3=4 v3=4  
u2+v2=2 u2=-6  
u3+v2=5 u3=-3  
u4+v2=4 u4=-4  
u4+v4=2 v4=6  
u4+v5=1 v5=5

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij

(1;5): 0 + 5 > 3; ∆15 = 0 + 5 – 3 = 2.

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (1;5): 3

Для этого в перспективную клетку (1;5) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-». Цикл приведен в таблице.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai  Bj | B1 | | B2 | | B3 | | B4 | | B5 | | ai |
| A1 | 30 | 2 | 10 - | 8 | 80 | 4 |  | 6 | + | 3 | 120 |
| A2 |  | 3 | 30 | 2 |  | 5 |  | 2 |  | 6 | 30 |
| A3 |  | 6 | 40 | 5 |  | 8 |  | 7 |  | 4 | 40 |
| A4 |  | 3 | 10 + | 4 |  | 4 | 20 | 2 | 30 - | 1 | 60 |
| bj | 30 | | 90 | | 80 | | 20 | | 30 | | 250 |

Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (1, 2) = 10. Прибавляем 10 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 10 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ai  Bj | B1 | | B2 | | B3 | | B4 | | B5 | | ai |
| A1 | 30 | 2 |  | 8 | 80 | 4 |  | 6 | 10 | 3 | 120 |
| A2 |  | 3 | 30 | 2 |  | 5 |  | 2 |  | 6 | 30 |
| A3 |  | 6 | 40 | 5 |  | 8 |  | 7 |  | 4 | 40 |
| A4 |  | 3 | 20 | 4 |  | 4 | 20 | 2 | 20 | 1 | 60 |
| bj | 30 | | 90 | | 80 | | 20 | | 30 | | 250 |

Число занятых клеток n + m - 1: 5 + 4 - 1 = 8 = 8, т.е. получен невырожденный план.

Составляем систему уравнений потенциалов (полагая u1 = 0):  
u1+v1=2 v1=2  
u1+v3=4 v3=4  
u1+v5=3 v5=3  
u2+v2=2 u2=-4  
u3+v2=5 u3=-1  
u4+v2=4 v2=6  
u4+v4=2 v4=4  
u4+v5=1 u4=-2  
  
Проверив свободные клетки, убеждаемся, что по теореме 5 план оптимален, следовательно, Z=Zmin.